

Contrôlabilité à zéro des systèmes paraboliques

Karine Mauffrey

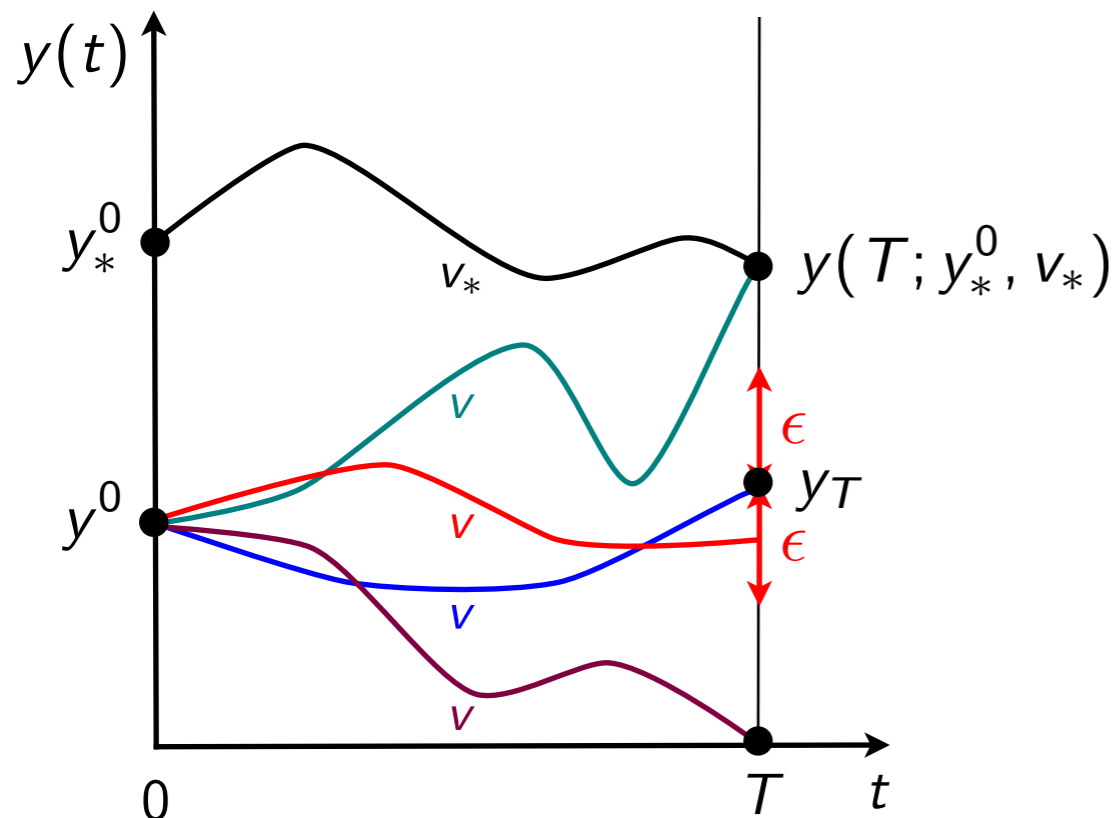
Post-doctorante, Centre Inria Saclay - Île-de-France, Équipe M3DISIM

*Travaux réalisés en doctorat sous la direction conjointe de
Farid Ammar Khodja (Laboratoire de Mathématiques de Besançon) et
Arnaud Münch (Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand)*

Journées DYNAMO, Orléans, 26-28 mars 2013

Différents concepts de contrôlabilité

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = y^0 \end{cases} \longrightarrow y(T; y^0, v)$$



Contrôlabilité exacte

$$\exists v / y(T; y^0, v) = y_T ?$$

Contrôlabilité approchée

$$\exists v / \|y(T; y^0, v) - y_T\| \leq \epsilon ?$$

Contrôlabilité à zéro

$$\exists v / y(T; y^0, v) = 0 ?$$

Contrôlabilité aux trajectoires

$$\exists v / y(T; y_0, v) = y(T; y_*^0, v_*) ?$$



Sommaire

Motivation : contrôlabilité d'un modèle de thérapie du cancer du cerveau

Contexte bibliographique - Le critère algébrique de Kalman

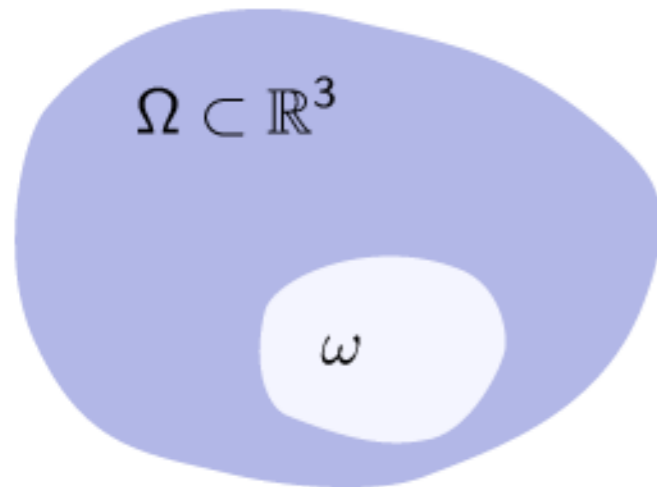
Présentation d'une nouvelle approche

Illustrations numériques



Motivation

Modèle de thérapie d'un cancer du cerveau



$$\begin{cases} \partial_t y = D\Delta y + F(y) + B v \mathbf{1}_\omega, & Q_T \\ \partial_\nu y = 0, & \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \Omega \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- y_1 : densité de cellules tumorales
- y_2 : densité de cellules saines
- y_3 : concentration de médicament
- v : vitesse d'injection du médicament

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad d_i > 0$$

$$F(y) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}y_1g_1(y_1) - (\alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)y_1 \\ \alpha_{22}y_2g_2(y_2) - (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{23}y_3)y_2 \\ -\alpha_{33}y_3 \end{pmatrix}$$

$$g_i(y_i) = 1, \text{ ou } 1 - y_i/k_i, \text{ ou } \ln(y_i/k_i), \text{ avec } k_i > 0$$

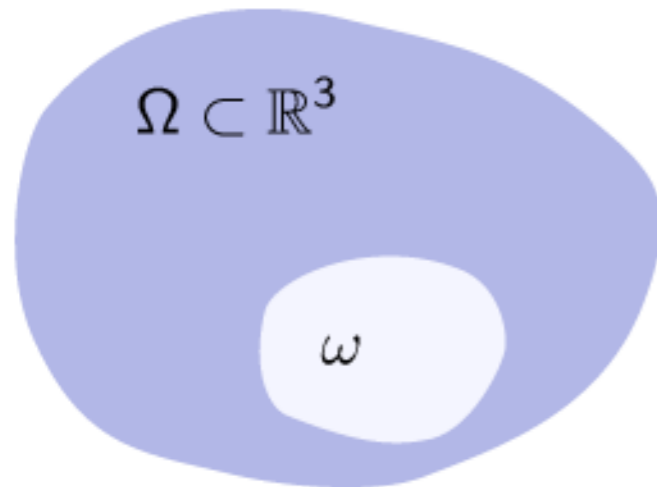
 **S. P. Chakrabarty, F. B. Hanson**

Optimal control of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model
Proc. American Control Conf. 973-978 (2005)



Motivation

Modèle de thérapie d'un cancer du cerveau



$$\begin{cases} \partial_t y = D\Delta y + Ay + Bv1_\omega, & Q_T \\ \partial_\nu y = 0, & \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \Omega \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- y_1 : densité de cellules tumorales
- y_2 : densité de cellules saines
- y_3 : concentration de médicament
- v : vitesse d'injection du médicament

$$D = I$$

$$A = A(x, t)$$

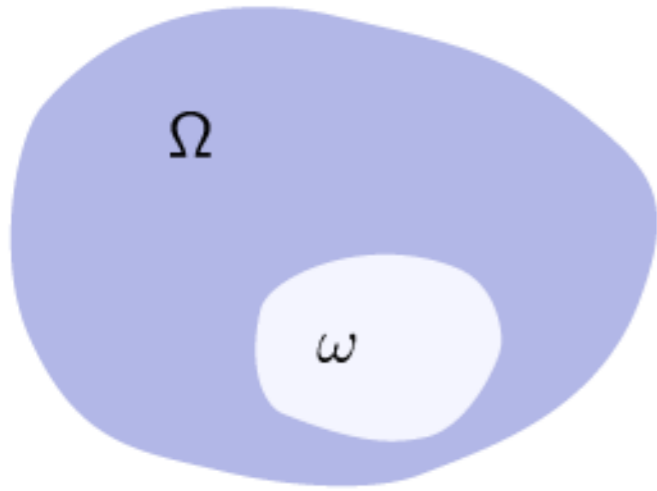
 **S. P. Chakrabarty, F. B. Hanson**

Optimal control of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model
Proc. American Control Conf. 973-978 (2005)



Présentation du problème

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + A(x, t)y + B v 1_\omega, & Q_T \\ y = 0, & \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \Omega \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\Omega \subset \mathbb{R}^N$: domaine borné de frontière C^2

$\omega \subset \Omega$: ouvert non vide

$Q_T = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times]0, T[$, $q_T = \omega \times]0, T[$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$: matrice de coefficients $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$

Problème de contrôlabilité à zéro

Étant donnée une condition initiale quelconque $y^0 \in (L^2(\Omega))^3$, trouver un contrôle $v \in L^2(q_T)$ tel que la solution y du système vérifie

$$y(\cdot, T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$



Cas autonome

 **F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa**

Recent results on the controllability of linear parabolic systems: a survey
Math. Control Relat. Fields 1(3) 267-306 (2011)

Contrôlabilité en dimension finie : le critère de Kalman

 **R. E. Kalman**

On the general theory of control systems

Proc. First Internat. Congress Automat. Contr. 481-491 (1960)

Caractérisation de la contrôlabilité pour $A \in M^n(\mathbb{R})$, $B \in M^{n,m}(\mathbb{R})$, $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$
du système différentiel linéaire autonome :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bv(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Contrôlabilité sur tout
intervalle $[T_0, T_1]$

\iff

$\text{rang} K = n$

Matrice de Kalman :

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) \in M^{n, mn}(\mathbb{R})$$



Cas autonome

Généralisation aux systèmes paraboliques à coefficients constants

 *F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, M. González-Burgos*

Controllability for a class of reaction-diffusion systems: the generalized Kalman's condition
C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345(10)** 543-548 (2007)

- Critère de Kalman encore **valable** pour la **caractérisation** de la contrôlabilité des systèmes **paraboliques**

$$(P) \begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B v \mathbf{1}_\omega, & Q_T \\ y = 0, & \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \Omega \end{cases}$$

lorsque $A \in M^n(\mathbb{R})$, $B \in M^{n,m}(\mathbb{R})$ et $v \in (L^2(Q_T))^m$

- Si $A \in M^3(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

(P) est contrôlable sur tout intervalle $[T_0, T_1]$

\iff

$\det K \neq 0$

$K = (B, AB, A^2B)$



Cas non autonome

Contrôlabilité en dimension finie



L. M. Silverman, H. E. Meadows

Controllability and observability in time-variable linear systems

SIAM J. Control **5** 64-73 (1967)

Caractérisation de la contrôlabilité pour $A \in C^{n-2}([0, T], M^n(\mathbb{R}))$,
 $B \in C^{n-1}([0, T], M^{n,m}(\mathbb{R}))$ et $v \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ du système différentiel
linéaire non autonome :

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Contrôlabilité sur tout
sous-intervalle $[T_0, T_1]$



Il existe E dense dans $[0, T]$ tel que
 $\forall t \in E, \text{rang } \tilde{K}(t) = n$

$$\tilde{K}(t) = (B_0(t), B_1(t), B_2(t), \dots, B_{n-1}(t))$$

$$\begin{cases} B_0(t) = B(t) \\ B_i(t) = A(t) B_{i-1}(t) - \frac{dB_{i-1}}{dt}(t) \\ 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$



Cas non autonome

Généralisation aux systèmes paraboliques

 **F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, M. González-Burgos**

A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems. *Diff. Equ. Appl.* **1(3)** 427-457 (2009)

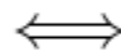
- Le critère de Kalman précédent (Silverman-Meadows) est encore **valable** pour la **caractérisation** de la contrôlabilité des systèmes **paraboliques**

$$(P) \begin{cases} \partial_t y = \Delta y + A(t)y + B(t)v1_\omega, & Q_T \\ y = 0, & \Sigma_T \\ y(x, 0) = y^0(x), & \Omega \end{cases}$$

lorsque $A \in C^{n-1}([0, T], M^n(\mathbb{R}))$, $B \in C^n([0, T], M^{n,m}(\mathbb{R}))$ et $v \in (L^2(q_T))^m$

- Si $A \in C^2([0, T], M^3(\mathbb{R}))$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{K}(t) = (B, A(t)B, A(t)^2B - \frac{dA}{dt}(t)B)$ alors

(P) est contrôlable sur tout sous-intervalle $[T_0, T_1]$ de $[0, T]$



Il existe E dense dans $[0, T]$ tel que $\forall t \in E, \det \tilde{K}(t) \neq 0$



Systemes à coefficients non constants

Systemes paraboliques en cascade

 **M. González-Burgos, L. de Teresa**

Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force. *Port. Math.* **67(1)** 91-113 (2010)

Condition géométrique sur la région de contrôle

 **A. Benabdallah, M. Cristofol, P. Gaitan, L. de Teresa**

Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force. *Preprint* (2011)

Conditions **suffisantes**, valables uniquement lorsque
la zone de **couplage** entre les équations
rencontre la région de **contrôle**



Systemes à coefficients non constants

Une nouvelle condition suffisante de contrôlabilité

 **K. Mauffrey**

On the null controllability of a parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces. *J. Math. Pures Appl.* **99 (2)** 187-210 (2013)

$$(P) \begin{cases} \partial_t y = \Delta y + A(x, t)y + B v \mathbf{1}_\omega, & Q_T \\ y = 0, & \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y^0, & \Omega \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Hypothèses :** • $a_{13}, a_{23} \in W_\infty^{2,1}(q_T) = \{a \in L^\infty(q_T) / D_x a, D_x^2 a, \partial_t a \in L^\infty(q_T)\}$
- $|a_{23}| \geq \alpha > 0$ dans q_T

On pose $K = (B, AB, A^2 B)$ et $\tilde{K} = (B, AB, A^2 B - \frac{dA}{dt} B)$

• Condition suffisante

«Généralise» le cas des coefficients constants ou ne dépendant que du temps

$\det \tilde{K} \geq c$ dans q_T
(ou $\leq -c$)

\implies

(P) est contrôlable



Contrôles fictifs

- **But : contrôler le système avec une force**

$$(P) \begin{cases} \partial_t y = \Delta y + A(x, t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} 1_\omega, & Q_T \\ y = 0, & \Sigma_T \\ y(x, 0) = y^0(x), & \Omega \end{cases}$$

- **Fait : le système est contrôlable par trois forces (inégalités de Carleman - Fursikov et Imanuvilov, 1993)**

Pour tout $\omega_0 \subset \Omega$, $\omega_0 \neq \emptyset$, il existe $\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)^T \in L^2(Q_T)^3$ tel que la solution de

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} = \Delta \hat{y} + A(x, t)\hat{y} + \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{pmatrix} 1_{\omega_0}, & Q_T \\ \hat{y} = 0, & \Sigma_T \\ \hat{y}(x, 0) = y^0(x), & \Omega \end{cases}$$

vérifie

$$\hat{y}(T) = 0$$

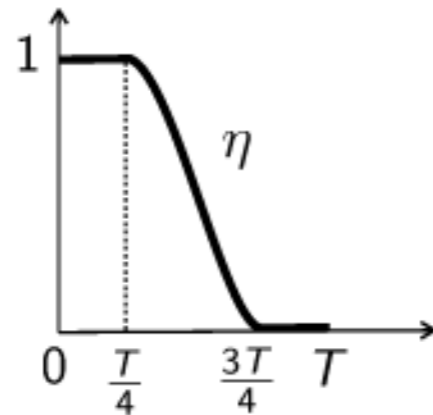
avec, de plus,

$$\int_{Q_T} e^{1/(T-t)} |\hat{y}|^2 < \infty, \quad \int_{Q_T} e^{1/(T-t)} |\nabla \hat{y}|^2 < \infty$$

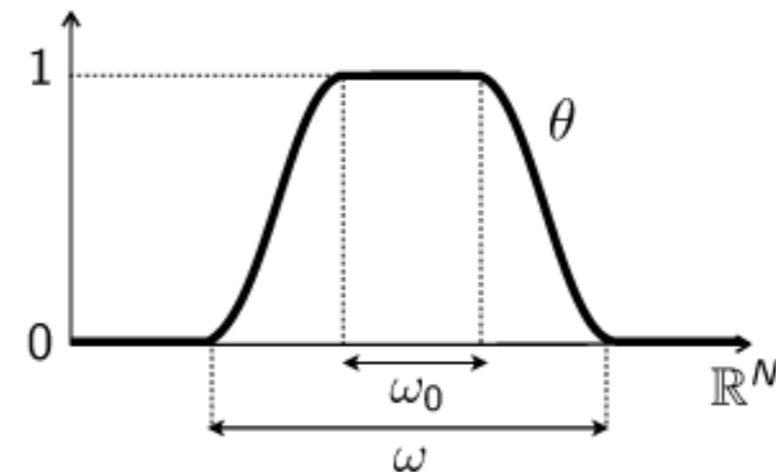


Contrôles fictifs

η – fonction de troncature en temps



θ – fonction de troncature en espace



On cherche une solution contrôlée y de (P) sous la forme

$$y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F$$

- où :
- \hat{y} est une solution contrôlée par trois contrôles sur $\omega_0 \subset \omega$
 - Y est la solution du système sans contrôle
 - l'inconnue F est à déterminer

 **M. González-Burgos, R. Pérez-García**

Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force
Asymptot. Anal. **46(2)** 123-162 (2006)



Condition suffisante

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F \\ y \text{ est solution de (P)} \\ y(T) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_t F = \Delta F + AF + h + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} 1_\omega, \\ F = 0, \\ F(0) = F(T) = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} Q_T \\ \Sigma_T \\ \Omega \end{array}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3, \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0, \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} Q_T \\ \Sigma_T \\ \Omega \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0$$

$$\partial_t F_3 - \Delta F_3 - a_{31}F_1 - a_{32}F_2 - a_{33}F_3 - h_3 = v1_\omega$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_3(0) = F_3(T) = 0 \\ F_3 = 0 \text{ sur } \Sigma_T \end{array} \right.$$

$$\text{où } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = h(\theta, \eta, \hat{y}, Y), \text{ avec } \text{supp } h \subset \omega \times [0, T]$$



Condition suffisante

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F \\ y \text{ est solution de (P)} \\ y(T) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_t F = \Delta F + AF + h + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} 1_\omega, & Q_T \\ F = 0, & \Sigma_T \\ F(0) = F(T) = 0, & \Omega \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3, & Q_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0, & \Sigma_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0, & \Omega \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0$$

$$\partial_t F_3 - \Delta F_3 - a_{31}F_1 - a_{32}F_2 - a_{33}F_3 - h_3 = v1_\omega$$

$$\text{supp } F \subset \omega \times [0, T]$$

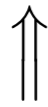
$$\left\{ \begin{array}{l} F_3(0) = F_3(T) = 0 \\ F_3 = 0 \text{ sur } \Sigma_T \end{array} \right.$$

$$\text{où } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = h(\theta, \eta, \hat{y}, Y), \text{ avec } \text{supp } h \subset \omega \times [0, T]$$



Condition suffisante

$$\left\{ \begin{array}{l} y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F \\ y \text{ est solution de (P)} \\ y(T) = 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3, & q_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0, & \sigma_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0, & \omega \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0$$

$$\partial_t F_3 - \Delta F_3 - a_{31}F_1 - a_{32}F_2 - a_{33}F_3 - h_3 = v \text{ dans } q_T$$

$$\text{supp } F \subset \omega \times [0, T]$$

$$F_3(0) = F_3(T) = 0$$

Une condition suffisante pour que $v \in L^2(q_T)$ est de construire un contrôle F_3 tel que $\partial_t F_3, \Delta F_3 \in L^2(q_T)$



Théorème

On considère l'espace

$$W = \{\psi \in L^2(0, T; H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)), \partial_t \psi \in L^2(q_T)\}$$

Hypothèses

- $a_{13}, a_{23} \in W_\infty^{2,1}(q_T)$
- $\exists \alpha > 0 / |a_{23}| \geq \alpha$ dans q_T
- $\exists c > 0 / \frac{\det K}{a_{23}^2} + \partial_t \left(\frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \geq c$ dans q_T (ou $\leq -c$)

Conclusion

Il existe $F_3 \in W$ tel que $F_3(0) = F_3(T) = 0$ et la solution $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} F_3, & q_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = 0, & \sigma_T \\ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(0) = 0, & \omega \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}(T) = 0.$$



Idées de la preuve

Si $\bullet a_{13}, a_{23} \in W_{\infty}^{2,1}(q_T)$ alors le changement de variables
 $\bullet \exists \alpha > 0 / |a_{23}| \geq \alpha$ dans q_T

$$\begin{aligned} z_1 &\longleftrightarrow F_1 - \frac{a_{13}}{a_{23}} F_2, \\ z_2 &\longleftrightarrow F_2, \end{aligned} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

permet de réécrire le problème de contrôle pour F sous la forme suivante :

Trouver $F_3 \in W$ tel que $F_3(0) = F_3(T) = 0$ et la solution z de

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + M(x, t) z + g + a_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_3, & q_T \\ z = 0, & \sigma_T \\ z(0) = 0, & \omega \end{cases}$$

vérifie $z(T) = 0$.

La matrice M fait intervenir $\nabla \frac{a_{13}}{a_{23}}$, $\Delta \frac{a_{13}}{a_{23}}$ et $\partial_t \frac{a_{13}}{a_{23}}$.



Idées de la preuve

Sous les hypothèses précédentes et si $\exists c > 0 / \frac{\det K}{a_{23}^2} + \partial_t \left(\frac{a_{13}}{a_{23}} \right) \geq c$ dans q_T (ou $\leq -c$)

alors pour tous $\Phi^0 \in (L^2(\omega))^2$ et $f \in (L^2(q_T))^2$ la solution $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ du problème

$$\begin{cases} -\partial_t \Phi = \Delta \Phi + M^* \Phi + f, & q_T \\ \Phi = 0, & \sigma_T \\ \Phi(T) = \Phi^0, & \omega \end{cases}$$

vérifie l'inégalité suivante (pour $p \geq 3$)

$$\|\Phi(0)\|_{(L^2(\omega))^2}^2 + \int_{q_T} (T-t)^p [\Phi_1^2 + \Phi_2^2] \leq C_p \left(\int_{q_T} [t(T-t)]^{p-3} \Phi_2^2 + \int_{q_T} (T-t)^p |f|^2 \right).$$

Par dualité, ce résultat donne l'existence de $F_3 \in W$ tel que $F_3(0) = F_3(T) = 0$ et $z(T) = 0$, et donc l'existence d'un élément $v \in L^2(q_T)$ tel que la solution $y = (1-\theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F$ du système (P) vérifie $y(T) = 0$.



Illustrations numériques

Méthode constructive utilisable numériquement

- 1 Y - solution sans contrôle
- 2 \hat{y} - solution contrôlée par trois contrôles sur $\omega_0 \subset \omega$
- 3 Construction de η , θ et $h(\eta, \theta, \hat{y}, Y)$
- 4 $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ - solution contrôlée par F_3 sur tout le domaine q_T
- 5 $y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F$ est une solution contrôlée par un seul contrôle sur ω

\hat{y} : Construction du contrôle comme unique minimiseur d'une fonctionnelle associée à l'inégalité de Carleman



A. V. Fursikov, O. Y. Imanuvilov

Controllability of evolution equations

Lecture Notes Series, Vol. 34, Seoul, 1996.



E. Fernández-Cara, A. Münch

Numerical null controllability of the 1d heat equation: primal methods

SeMA Journal **61(1)** 49-78 (2013)



Illustrations numériques

Méthode constructive utilisable numériquement

- 1 Y - solution sans contrôle
- 2 \hat{y} - solution contrôlée par trois contrôles sur $\omega_0 \subset \omega$
- 3 Construction de η , θ et $h(\eta, \theta, \hat{y}, Y)$
- 4 $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ - solution contrôlée par F_3 sur tout le domaine q_T
- 5 $y = (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta Y + F$ est une solution contrôlée par un seul contrôle sur ω

Application au cas d'un système à coefficients constants en dimension 2

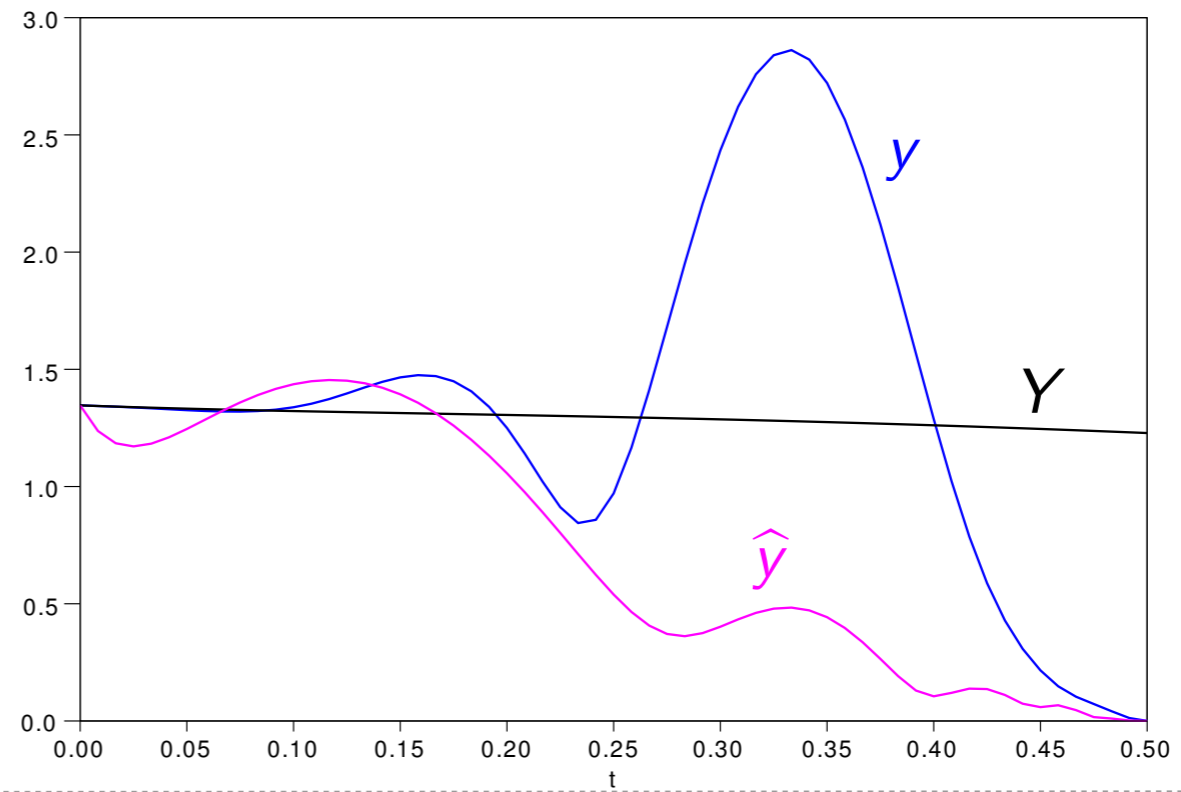
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad D = cI, \quad c = 0.1 \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Omega =]0, 1[^2, \quad T = 0.5 \\ \omega =]0.2, 0.8[^2, \quad \omega_0 =]0.4, 0.6[^2 \end{array}$$

$$\det K \neq 0, \quad K = (B, AB, A^2B)$$

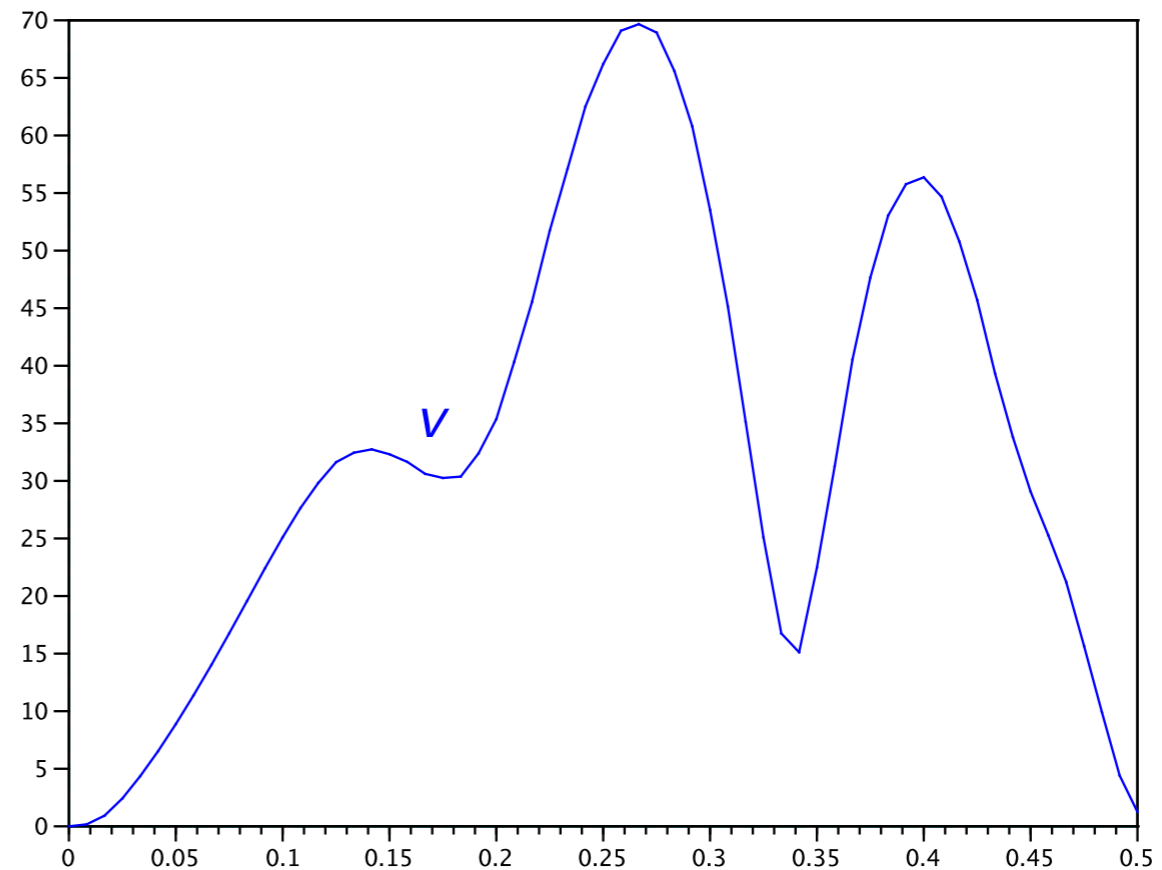


Illustrations numériques

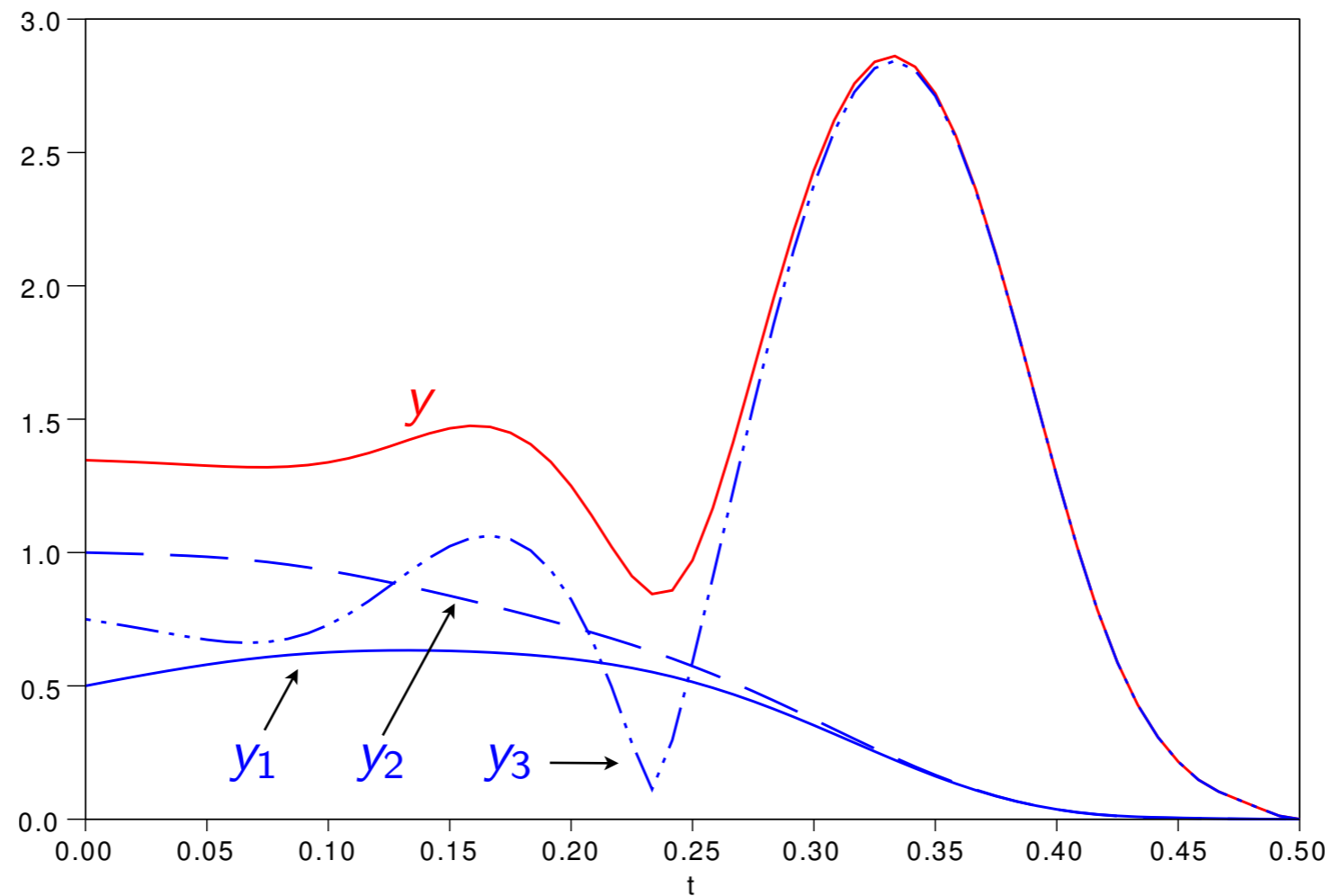
Normes $L^2(\Omega)$ de y , \hat{y} et Y au cours du temps



Norme $L^2(\omega)$ du contrôle v au cours du temps



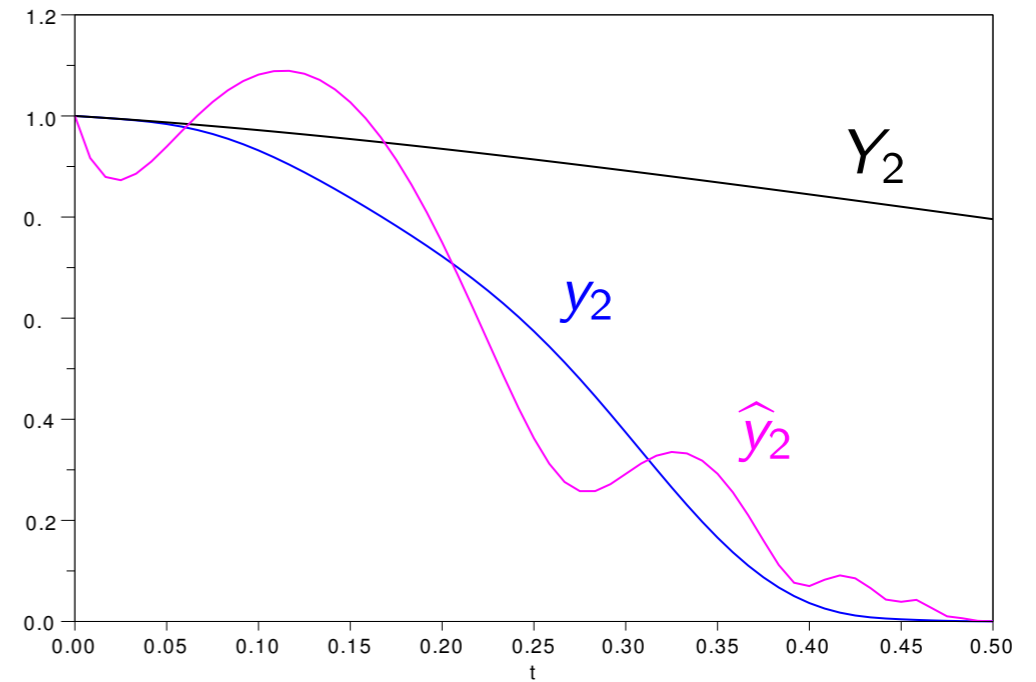
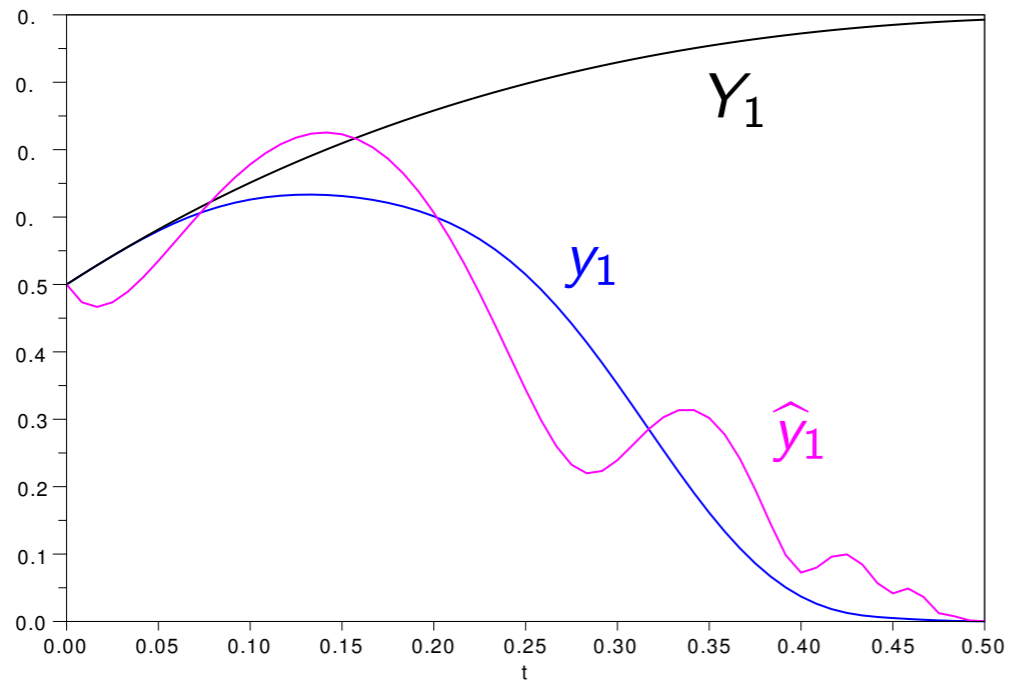
Illustrations numériques



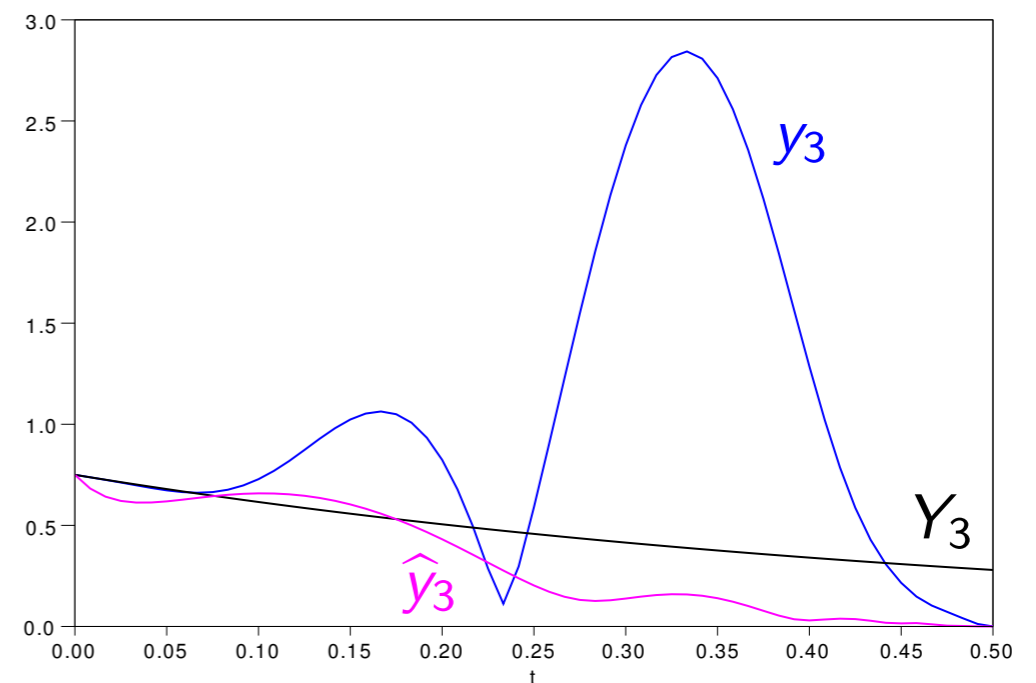
Normes $L^2(\Omega)$ de y et de ses composantes au cours du temps



Illustrations numériques



Comparaison entre les normes $L^2(\Omega)$ des composantes respectives de Y , \hat{y} et y au cours du temps



Commentaires sur la méthode

Méthode qui étend le critère de Kalman pour les systèmes de trois équations à coefficients constants ou à coefficients ne dépendant que du temps

Méthode constructive qui permet d'approcher numériquement une solution d'un système parabolique de trois équations contrôlé par une force (en 2D)

Valable aussi avec une matrice de diffusion diagonale $D \neq I$

Donne la contrôlabilité par $n - 2$ forces d'un système parabolique de n équations

Ne s'applique que lorsque la région de couplage rencontre la région de contrôle (cf *Alabau-Boussouira et Léautaud, 2011* pour un exemple où la région de couplage ne rencontre pas la région de contrôle)



Perspectives

Étendre au cas des systèmes de n équations contrôlées par une force

Étudier le cas des systèmes non linéaires

Étudier le cas d'un couplage avec des termes d'ordre 1 en espace

Illustrer la méthode numériquement pour des systèmes à coefficients non constants, et en 3D

